

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (3 ώρες)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α. Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο ».

Αν f, g συνεχείς στο » και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 4$ και $g(1) = 7$, τότε να

βρείτε την $f(x)$ αν $g(x) = x + 6$.

β. Αν $f'(x) = f(x) \epsilon \text{φ}x$ για κάθε $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ να δειχτεί ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{f(x)} \sigma v x$ είναι συνεχής.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + \ln(1-x)$

α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

β. Να λύσετε την εξίσωση $e^{1-2x} - e^{2-x} = \ln \frac{3-x}{2-2x}$ στο $(-\infty, 1)$.

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Μια συνάρτηση φείνεται ορισμένη και παραγωγίσιμη στο » με $f(0) = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $(e^x + 1)f(x) + \ln(x^2 + 1) \geq 4$. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$

B. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Αν η ευθεία $y = 3x + 4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε:

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x))$

β. Να δείξετε ότι $f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 1$

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. 1. Δίνεται η $f(x) = 9x^2 > 4 : y \sim x$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f \not\equiv 0 : \mathbb{N} 0$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 0.

β. Να δείξετε, με τη βοήθεια της f , ότι υπάρχει $x > 2, 2$: ώστε: $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 2$

2. Να βρεθεί η συνάρτησης f παραγωγίσιμη στο », για την οποία ισχύει:

$\frac{f'(x)}{e^x} : \mathbb{N} y \sim x < t^2 \epsilon x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f \frac{f}{2} : \mathbb{N} 1 < e^{\frac{f}{2}}$.

B. α. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$ έχει τρία σημεία καμπής που είναι συνευθειακά και να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας τους.

β. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt, x > 0$. Να δειξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x} \ln x^2, x > 0$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\Delta = (0, +\infty)$. Αν η κλίση της f σε κάθε $x \in \Delta$ είναι $\frac{x - f(x)}{x}$

και η ευθεία $y = 2x - e$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(x_0, y_0)$ τότε:

α. Προσδιορίστε το σημείο επαφής M

β. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης

γ. Μελετήστε ως προς τη μονοτονία την f και βρείτε το πεδίο τιμών της

δ. Λύσετε την εξίσωση $\ln x < \frac{1}{2x} \mathbb{N} 0$